как сцена, объекты, свойства объектов. Были проанализированы свойства объектов и, учитывая сходную природу реальных прототипов, было дано соответствующее разбиение объектов на классы. В итоге это позволило сформулировать задачу визуализации для динамических сцен в общем виде и решить ее как в теоретическом, так и в практическом смысле. В итоге была разработана программная система.

Область применения системы достаточно широка: от создания презентаций, до использования в интерактивных приложениях, ориентированных на использование трехмерной графики. Система решает поставленную задачу визуализации в общем виде, что отличает ее от множества других, специализированных систем. То есть, если специализированные системы визуализации работают с объектами, то наша система работает с типами, классами объектов, позволяя таким образом абстрагироваться от частных задач и дать возможность решать какие-то их подмножества в целом. Это значит, что использование разработанной системы избавляет от необходимости создания специализированных алгоритмов визуализации при решении различных задач.

Литература

1. Microsoft DirectX9 SDK documentation
2. *Джеффри Рихтер*, Windows для профессионалов, Мн. 2003

О СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ЦЕПИ МАРКОВА ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

М.В. Мальцев

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Цепи Маркова высокого порядка широко применяются для анализа стационарных процессов [1-4]. Существенным недостатком данной модели является экспоненциальное возрастание количества параметров при увеличении порядка. В связи с чем, была разработана модель цепи Маркова переменной длины.

Пусть $A = \{0,1,\ldots N-1\}$ – пространство состояний мощности $2 \le N \le \infty$; $x_i^j = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j)$ – строка длительности $|x_i^j| = j - i + 1$ $(i < j)$; $uw = (u_1, u_2, \ldots, u_{|u|}, w_1, w_2, \ldots, w_{|w|})$ – конкатенация строк u, w; $(X_t \in A)_{t \in \mathbb{Z}}$ – стационарная цепь Маркова s- го порядка с вероятностями одношаговых переходов

$$p_{x_1^{s+1}} = \mathbf{P}\{X_{t+s} = x_{s+1} | X_{t+s-1} = x_s, \ldots, X_t = x_1\}, \; x_1^{s+1} \in A^{s+1}.$$

Определение. Цепь Маркова $(X_t)_{t\in C}$ называется цепью Маркова переменной длины порядка s, если ее вероятности одношаговых переходов имеют вид [5]:

$$p_{x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}} = q_{x_{s-l+1}, x_{s-l+2}, \ldots, x_{s+1}}, \tag{1}$$

где $l = l(x_1^s)$, $x_1^{s+1} \in A^{s+1}$.

Соотношение (1) означает, что вероятность перехода в состояние x_{s+1} зависит не от всех s предыдущих состояний, а лишь от $l(x_1^s)$.

Функция $l(\cdot)$ определяется с помощью контекстной функции [5]:

$$c(x_1^s) = x_{s-l+1}^s, \; x_1^s \in A^s, \; l(x_1^s) = \left| c(x_1^s) \right|.$$

Контекстная функция последовательности x_1^s ставит в соответствие последовательность x_{s-l+1}^s по следующему правилу:

$$l(x_1^s) = \left| c(x_1^s) \right| = \min\{k : \mathbf{P}\{X_{t+s} = x_{s+1} | X_{t+s-1} = x_s, \ldots X_t = x_1\} =$$
$$\mathbf{P}\{X_{t+s} = x_{s+1} | X_{t+s-1} = x_s, \ldots, X_{t+s-l} = x_{s-l+1}\}\}.$$

Множество значений контекстной функции обозначим τ.

Контекстную функцию удобно представлять в виде корневого дерева, которое называется контекстным деревом. У каждой вершины в таком дереве может быть не более N потомков, поскольку каждому узлу (кроме корня) соответствует элемент из пространства состояний A. Каждому значению контекстной функции из множества τ соответствует ветвь данного дерева.

2. ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Пусть $\delta_{x_1^k, y_1^k} = \prod_{i=1}^{k} \delta_{x_i, y_i}$ – символ Кронекера для строк x_1^k, y_1^k;

$\nu_{x_a^b}(n) = \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i^{i+b-a}, x_a^b}$ – частотные статистики ЦМПД.

Рассмотрим реализацию $X = (X_1, \ldots X_n)$ цепи Маркова переменной длины порядка s с контекстной функцией c. Оценки для переходных вероятностей имеют вид:

$$\hat{\mathbf{P}}\left\{X_{t+1}=x_{t+1}\middle|X_{t-l+1}^{t}=x_{t-l+1}^{t}\right\}=\frac{\nu_{x_{t-l+1}^{t+1}}(n)}{\nu_{x_{t-l+1}^{t}}(n)}. \qquad (2)$$

Теорема 1. Если для реализации $X=(X_1,\dots X_n)$ цепи Маркова переменной длины s-го порядка (1) длительности $n>s$ с контекстной функцией c выполнено условие $\nu_{x_{t-l+1}^{t}}(n)>0$, то оценки (2) являются состоятельными оценками максимального правдоподобия.

3. КОНТЕКСТНЫЙ АЛГОРИТМ

Для оценивания контекстной функции построен так называемый контекстный алгоритм, состоящий из трех шагов [5]: 1 – построение максимального дерева, 2 – усечение контекстного дерева, 3 – построение оценок для параметров цепи Маркова переменной длины.

Усечение происходит по следующему правилу: в контекстном дереве заменяем x_{t-l+1}^{t} на x_{t-l+2}^{t}, если

$$\sum_{x_{t+1}\in A}\nu_{x_{t-l+1}^{t+1}}(n)\log\left(\frac{\hat{\mathbf{P}}\left\{X_{t+1}=x_{t+1}\middle|X_{-l+1}^{t}=x_{-l+1}^{t}\right\}}{\hat{\mathbf{P}}\left\{X_{t+1}=x_{t+1}\middle|X_{t-l+2}^{t}=x_{t-l+2}^{t}\right\}}\right)<K,$$

$$K\sim C\log(n),\ \ C>2N+4.$$

Значение параметра K выбирается из асимптотических соображений. За счет выбора данного параметра можно регулировать величину контекстного дерева: при $K_1<K_2$ в контекстном дереве, построенном с параметром K_1, при прочих равных параметрах, будет больше вершин, чем у контекстного дерева, построенного с параметром K_2.

Доказано, что, если вероятности одношаговых переходов положительны: $q_{x_{s-l+1}^{s+1}}>0,\quad x_{s-l+1}^{s+1}\in A^{l}$, то оценка контекстной функции, полученная с помощью контекстного алгоритма, является состоятельной.

4. ТЕСТ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНЫХ СТАТИСТИК ЦМПД

Рассмотрим цепь Маркова переменной длины $(X_t)_{t\in\mathbf{C}}, X_t\in A$ порядка s. Построим тест для проверки гипотез: $H_0:\{X_t\}_{t\in\mathbf{C}}$ – равномерно распределенная случайная последовательность, $H_1=\overline{H}_0:\{X_t\}_{t\in\mathbf{C}}$– цепь Маркова переменной длины с переходными вероятностями одношаговых переходов

$$q_{x_{s-l+1}^{s+1}} = q_{x_{s-l+1}^{s+1}}(n) = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{\omega_{x_{s-l+1}^{s+1}}(n)}{\sqrt{n}}\right) > 0 \text{, где } \omega_{x_{s-l+1}^{s+1}}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \omega_{x_{s-l+1}^{s+1}},$$

причем $\sum_{x_{s+1}\in A} \omega_{x_{s-l+1}^{s+1}} = 0$, $\sum_{x_{s-l+1}^{s}\in A} \sum_{x_{s+1}\in A} |\omega_{x_{s-l+1}^{s+1}}| \neq 0$.

Введем следующие обозначения:

$$\xi_{i_1,\ldots,i_{l_k},i_{l_k+1}}(n) = \frac{\nu_{i_1,\ldots,i_{l_k},i_{l_k+1}}(n) - n/N^{l+1}}{\sqrt{n/N^{l+1}}}, \ (i_1,\ldots,i_{l_k}) \in \tau, \ i_{l_k+1} \in A;$$

$$\rho(n) = \sum_{\substack{k,\\ (i_1,\ldots,i_{l_k})\in\tau}} \sum_{i_{l_k+1}\in A} \xi^2{}_{(i_1,\ldots,i_{l_k+1})}(n) \ - \sum_{\substack{k,\\ (i_1,\ldots,i_{l_k})\in\tau}} \left(\sum_{i_{l_k+1}\in A} \xi_{(i_1,\ldots,i_{l_k+1})}(n)\right)^2.$$

Теорема 2. Если справедлива гипотеза H_0, то при $n\to\infty$ распределение статистики $\rho(n)$ сходится к χ^2-распределению с $M = |\tau|(N-1)$ степенями свободы.

С помощью полученного в теореме 2 результата построено решающее правило, основанное на статистике $\rho(n)$:

$$\begin{cases} H_0 : \rho(n) \le \Delta, \\ H_1 : \rho(n) > \Delta, \end{cases}$$

где Δ – порог, определяемый, исходя из заданной вероятности ошибки первого рода α.

Теорема 3. Если справедлива гипотеза H_1, то при $n\to\infty$ распределение статистики $\rho(n)$ сходится к нецентральному χ^2-распределению с M степенями свободы и параметром нецентральности a^2, определяемому следующей формулой:

$$a^2 = \frac{1}{N|\tau|} \sum_{\substack{k,\\ (x_1,\ldots x_{l_k})\in\tau}} \sum_{x_{l_k+1}\in A} \left(\omega_{x_1\ldots x_{l_k},x_{l_k+1}}\right)^2.$$

Следствие 1. Если $\Delta = G_M^{-1}(1-\alpha)$ – квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного χ^2 –распределения с M степенями свободы, то при $n\to\infty$ размер критерия равен $\alpha \in (0,1)$.

Литература

1. *Уотермен М.С.* Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М. – Мир, 1999. – 350 с.
2. Харин Ю.С. и др. Математические и компьютерные основы криптологии. – Мн. – Новое знание, 2003. – 381 с.
3. *Ching W.K., Eric S.F., Michael K.Ng*. High-order Markov chain models for categorical data sequences // Wiley Periodicals, Inc. Naval Research Logistics, 2004, Vol. 51, pp. 557 – 574.
4. *Кемени Дж., Снелл Дж*. Конечные цепи Маркова. – М. – Наука, 1970. – 272 с.
5. *Buhlmann P., Wyner A*. Variable length Markov chains // The Annals of Statistics, 1999, Vol. 27, No. 2, pp. 480-513.
6. *Тихомирова М.И., Чистяков В.П.* О двух статистиках типа хи-квадрат, построенных по частотам цепочек состояний сложной цепи Маркова // Дискретная математика, 2003, Т. 15, №2, с. 149 – 159.

АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ФИНАНСОВЫМИ РИСКАМИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

А. А. Петрушко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПРОБЛЕМЫ ОЦЕНКИ РЫНОЧНОГО РИСКА

Актуальность данной проблемы связана с нестабильностью международных финансовых рынков, которая обуславливает высокий уровень волатильности (изменчивости) курсов и доходностей финансовых активов [1]. Необходимость минимизации потерь при совершении финансовых инвестиций заставляет инвесторов-хеджеров использовать математические методы оценки и управления финансовыми рисками. Риск финансовых инвестиций состоит в возможности получения фактической доходности, которая отличается от доходности, ожидаемой инвестором при совершении сделок с финансовыми активами.

Финансовые риски подразделяются на два основных вида: кредитный риск и рыночный риск. Наибольший интерес для валютных и фондовых рынков представляет рыночный риск – риск, связанный с возможным изменением рыночных котировок активов и изменением процентных ставок. Для его измерения в настоящее время используется методология «Value-at-Risk» («стоимость под риском») или VaR.

Определение. Мера риска VaR – это максимальная величина убытков на исследуемом временном горизонте, которая с заданной заранее и достаточно большой вероятностью $1-p$ не будет превышена.

Следовательно, допускается существование достаточно малой вероятности p того, что убыток составит величину большую, чем VaR (на